Torsten Schreiber 10.02.2011

Klausur zum Wintersemester 2010/11

Name: ____________________ Matrikel-Nr: ____________________

EMail: ____________________ (optionale Schnell-Korrektur)

Als Hilfsmittel sind nur die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten Unterlagen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen) zugelassen.
Handschriftliche Notizen, die nicht innerhalb des Skriptes vorgenommen wurden, wie auch elektronische Hilfsmittel, sind nicht gestattet.

1. Gegeben sei die Funktion $f(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{e^{9-6x}}{8}}+4x\right)$ **25 Punkte**

   a) Bestimmen Sie das 4. Taylorpolynom $P_4(x,x_0)$ zu $x_0=1{,}5$ (ohne Fehlerabschätzung).

   b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der 1. Ableitung $\left(f'\right)^{-1}$ und deren Definitionsbereich.

   c) Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x)$ und deren Wertebereich.

   d) Bestimmen Sie den Extrempunkt von $f(x)$ und klassifizieren diesen.

2. Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv gegeben mit $a_0=25$, $3\cdot a_{n+1}=2\cdot(a_n+5)$ für $n\geq 0$. **10 Punkte**

   Zeigen Sie:

   a) Die Folge ist streng monoton wachsend oder fallend.
   b) Die Folge besitzt eine obere und eine untere Schranke.
   c) Die Folge ist konvergent.
   d) Berechnen Sie den Grenzwert.

3. Bestimmen Sie von der Funktion $f(x)=-2\left(\sin^3\left(\frac{3}{4}(x+6\pi)\right)\right)^2+2$ **10 Punkte**

   Symmetrie, Periode und Amplituden (Wertebereich).

4. a) Bestimmen Sie folgenden Grenzwert : $\lim\limits_{x\to(2)}\left(\frac{(4-x)^2-4)}{(4x-7)-\sqrt{3x-5}}\right)$. **5 Punkte**

   b) Berechnen Sie den maximal möglichen Konvergenzbereich $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2x)^k}{k}\right)$. **5 Punkte**

   c) Beweisen Sie, dass der Ausdruck $3^{n+1}+2^{3n+1}$ für $n\in Z_0^+$ durch 5 teilbar. **5 Punkte**

30 Punkte sind Pflicht, ab 42 beginnt die Kür!

$$f(x) = -\tfrac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{e^{9-6x}}{8}} + 4x \right) = -\tfrac{1}{4} e^{3-2x} - 2x$$

a)

n	$f^{n}(x)$	$f^{n}(1{,}5)$	$(x-1{,}5)^n$	$n!$
0	$-\frac{1}{4}e^{3-2x} - 2x$	$-3\frac{1}{4}$	1	1
1	$\frac{1}{2} \cdot e^{3-2x} - 2$	$-1\frac{1}{2}$	$(x-1{,}5)$	1
2	$-1 \cdot e^{3-2x}$	-1	$(x-1{,}5)^2$	2
3	$2 \cdot e^{3-2x}$	2	$(x-1{,}5)^3$	6
4	$-4 \cdot e^{3-2x}$	-4	$(x-1{,}5)^4$	24

$$P_4(x, 1{,}5) = -3\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2}(x-1{,}5) - \tfrac{1}{2}(x-1{,}5)^2 + \tfrac{1}{3} \cdot (x-1{,}5)^3 - \tfrac{1}{6}(x-1{,}$$

b) $f'(x) = \frac{1}{2} e^{3-2x} - 2 = y \quad | +2 | \cdot 2$

$e^{3-2x} = 2y + 4 \quad | \ln$

$3 - 2x = \ln(2y+4) \quad | -3 \quad \cdot (-\frac{1}{2})$

$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln(2y+4)$

$\Rightarrow f'(x)^{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(2x+4) \quad ; \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>-2}$

c) $f(x) = -\frac{1}{4} e^{3-2x} - 2x$

$F(x) = \frac{1}{8} \cdot e^{3-2x} - x^2 \quad ; \quad \mathbb{D}_{F(x)} = \mathbb{R} \quad$ (stetig)

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} F(x) &= [0 - \infty] = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} F(x) &= [\infty^* - \infty] = \infty \end{aligned}\right\} \mathbb{W}_{F(x)} = \mathbb{R}$$

1) c) $f'(x) = \frac{1}{2} e^{3-2x} - 2 = 0 \qquad | +2 \ \cdot 2$

$e^{3-2x} = 4 \qquad | \ln$

$e^{3-2x} = \ln 4 \qquad | -3 \ \cdot (-\frac{1}{2})$

$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{3}{2} - \ln 2$

<u>Prüfung:</u> $f''(x) = -e^{3-2x} < 0 \Rightarrow HP\ (x \,/\, f(x)$

$f(\frac{3}{2} - \ln 2) = -\frac{1}{4} e^{3-2\cdot(\frac{3}{2}-\ln 2)} - 2\cdot(\frac{3}{2} - \ln 2)$

$= -\frac{1}{4} e^{3-3+2\ln 2} - 3 + 2\ln 2$

$= -\frac{1}{4} e^{\ln 4} - 3 + \ln 4 = \ln 4 - 4$

$\Rightarrow HP\ (\frac{3}{2} - \ln 2 \,/\, \ln 4 - 4)$

2) $3 \cdot a_{n+1} = 2\cdot(a_n + 5)\ ;\ a_0 = 25 \quad \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{10}{3}$

a) <u>Monotonie:</u> Behauptung: $a_{n+1} < a_n$

$n = 0$: $a_1 < a_0$

$20 < 25$ ✓

$n := n+1$: $a_{n+2} < a_{n+1}$ (→ zu zeigen)

$a_{n+1} < a_n \qquad | \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} a_{n+1} < \frac{2}{3} a_n \qquad | + \frac{10}{3}$

$\frac{2}{3} a_{n+1} + \frac{10}{3} < \frac{2}{3} a_n + \frac{10}{3}$

$a_{n+2} < a_{n+1}$

b) <u>Schranken:</u> $a_0 = 25$ ist obere Schranke

Behauptung: $a_n > 0$ (untere Schranke)

$n = 0$: $a_0 = 25 > 0$ ✓

$n := n+1$: $a_{n+1} > 0$ (→ zu zeigen)

$a_n > 0 \qquad | \cdot \frac{2}{3} + \frac{10}{3}$

2) c) Konvergenz: Da a_{n+1} streng monoton fallend ist und durch 25 und 0 beschränkt ist, liegt Konvergenz vor.

d) Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \} \alpha$

$\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{10}{3} \quad | - \frac{2}{3}\alpha$

$\frac{1}{3}\alpha = \frac{10}{3} \quad | \cdot 3$

$\alpha = 10 \qquad \mathbb{L} = \{10\} \in [0; 25]$

3) $f(x) = -2 \cdot (\sin^3(\frac{3}{4}(x + 6\pi)))^2 + 2$ $\quad \frac{9}{2}\pi = 4\frac{1}{2}\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2}$

$= -2 \cdot \sin^6(\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}\pi) + 2$

$= -2 \cdot [\sin(\frac{3}{4}x) \cdot \underbrace{\cos(\frac{9}{2}\pi)}_{0} + \cos(\frac{3}{4}x) \cdot \underbrace{\sin(\frac{9}{2}\pi)}_{1}]^6 + 2$

$\Rightarrow f(x) = -2 \cdot \cos^6(\frac{3}{4}x) + 2$

Symmetrie: $f(x) = f(-x)$ Achsensymmetrie

$-2 \cdot \cos^6(\frac{3}{4}x) + 2 = -2 \cdot \cos(\frac{3}{4}(-x)) + 2 \quad | -2 \cdot (-\frac{1}{2})$

$\cos^6(\frac{3}{4}x) = \cos^6(-\frac{3}{4}x)$ ✓,

da $\cos(x) = \cos(-x)$

Periode: $p = \frac{2\pi}{3/4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}\pi$

$f(x) = f(x + \frac{4}{3}\pi)$

$= -2 \cdot \cos^6(\frac{3}{4}(x + \frac{4}{3}\pi)) + 2 \quad | -2 \cdot (-\frac{1}{2})$

$= [\cos(\frac{3}{4}x) \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{(-1)} - \sin(\frac{3}{4}x) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{0}]^6$

$= \cos^6(\frac{3}{4}x) \cdot (-1)^6 = \cos(\frac{3}{4}x)$ ✓

Amplituden: $-2 \cdot [-1; 1]^6 + 2$

$-2 \cdot [0; 1] + 2$

$[0; -2] + 2 \Rightarrow W_f = [0; 2]$

4) a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(4-x)^2 - 4}{(4x-7) - \sqrt{3x-5}} = 0/0 \Rightarrow$ L'Hospital

$$\lim_{x \to 2} \frac{2\cdot(4-x)\cdot(-1)}{4 - \frac{3}{2\cdot\sqrt{3x-5}}} = \frac{-4}{4-\frac{3}{2}} = \frac{-4}{5/2} = -8/5$$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(2x)^k}{k} \rightarrow$ Quotienten-Kriterium:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(2x)^{k+1} \cdot k}{(k+1)(2x)^k} = \lim_{k \to \infty} (2x) \cdot \frac{k}{k+1} < 1$$

$\Rightarrow x \in]-1/2 ; 1/2[$

Randbetrachtung: $x = -1/2$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot 1/k$

Leibniz: $\lim\limits_{k \to \infty} 1/k = 0$ } konvergent

$x \in [-1/2 ; 1/2[$

$x = 1/2$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k \;\hat{=}\;$ harmonische Reihe $\Rightarrow$ divergent.

c) $3^{n+1} + 2^{3n+1} = 5\cdot k \;;\; k \in \mathbb{Z}$

$n = 1$: $3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25 = 5\cdot k \;;\; k \in 5$ ✓

$n := n+1$: $3^{n+2} + 2^{3\cdot(n+1)+1} = 5\cdot k$

$3\cdot 3^{n+1} + 2^{3n+4} = 5\cdot k$

$3\cdot 3^{n+1} + 2^3 \cdot 2^{3n+1}$

$3\cdot 3^{n+1} + 3\cdot 2^{3n+1} + 5\cdot 2^{3n+1}$

$3\cdot(\underbrace{3^{n+1} + 2^{3n+1}}) + 5\cdot 2^{3n+1}$

$3\cdot\; 5\cdot k_1 + 5\cdot 2^{3n+1}$

$3\cdot 5\cdot \mathbb{Z} + 5\cdot \mathbb{N}$

$5\cdot k \;;\; k \in \mathbb{Z}$